数理解析研究所講究録
750巻 1991年 85-90

Microlocal Study of Diffraction by a Knife-Edge

by M. Uchida
(Dept. of Mathematics, Kobé Univ.)

Diffraction of a single incident ray or a simple progressing wave by a knife-edge (or a corner of an obstacle) is formulated and proved from the standpoint of microlocal analysis. A general theorem on "diffraction without boundary conditions" is given in terms of boundary analytic micro-supports (note: this notion is due to P. Schapira (1986)) and applied to Dirichlet problems on a region complementary to a knife-edge. This gives a general proof to the observation of J.-B. Keller (1958); i.e. it claims that a cone of diffracted rays is produced by incident singularity of a microfunction solution which hits the knife-edge.

ナイフエッジによる回折現象の超局所解析

内田素夫（神戸大・自然科学）
(Motoo UCHIDA)

§0. Mを$\mathbb{R}^n$の開集合，a_1, a_2をM上定義された実数値実解析的函数で$da_1 \wedge da_2 \neq 0$であるとする。Mの開集合$\Omega = \{a_1 > 0\} \cup \{a_2 > 0\}$を考え、

$$N_1 = \{a_1 = 0\}, \quad \partial_1\Omega = \{a_1 = 0,\ a_2 < 0\},$$
$$N_2 = \{a_2 = 0\}, \quad \partial_2\Omega = \{a_1 < 0,\ a_2 = 0\}$$

とおく。$P = P(x, D)$を実解析的係数2階線形偏微分作用素で、実主要型であると仮定する。またN_1, N_2はPに関して非特性的であると仮定する。このとき、次の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{on } \Omega \\ u|_{\partial_1\Omega} = g_1, & u|_{\partial_2\Omega} = g_2 \end{cases}$$

ここにDirichlet data g_1は$\{x \in N_1 ; a_2(x) \leq 0\}$の近傍で定義された$N_1$上の実解析的函数，$g_2$も同様とする。上の境界値問題の解$u \in \Gamma(\Omega ; \mathcal{B}_M)$の特異性が領域内部では$P$の陪特性帯に沿って伝播し、また境界$\partial_1\Omega, \partial_2\Omega$に横断的にぶつかるとそれはその点で反射することはよく知られている。問題となるのは、陪特性帯が障害物$(M \setminus \Omega)$の角(edge)$\{a_1 = a_2 = 0\}$にぶつかるとき、それに沿って伝播して来たuの特異性はどういう振舞をするのかという点である。（その反対に入射しては

特異性なしにedgeから特異性が生じ得るかどうかも問題であるが今はこちらは考えない。）講演では、角に於ける特異性の伝播(或いは凝集(condensation))の一般的な定理を与え、それを応用することで上の形の混合型境界値問題に於て回折現象(diffraction by a corner)が起ることを示した。特にPが波動作用素の場合には、これは、J.B. Keller (1962)の回折の幾何的理論に超局所解析の立場から一つの証明を与えている。以下の考察の詳細については、論文"Microlocal analysis of Diffraction by a Corner" (To apear in A.E.N.S)を参照して下さい。

§1. $N_0=\{a_1=a_2=0\}$, Y_0 を N_0 の $\mathbb{C}^n$ に於ける複素化, $\rho_0 : T^*X \underset{X}{\times} Y_0 \longrightarrow T^*Y_0$ を自然な射影とする。

$q_0\in T^*_{N_0}Y_0$ として. $E(q_0)=\rho_0^{-1}(q_0)\cap T^*_M X$ と定める。以下Pの主シンボルを $f=f(z,\zeta)$ とかく。$f|E(q_0)$ が2次多項式であることに注意して、

$$C=\{p\in E(q_0)\mid f(p)=0\}$$

は $E(q_0)$ 内の楕円であると仮定する。以下 q_0 は固定する。

$g=\mathrm{Im}\, f$ の実Hamiltonベクトル場を $H_g^{\mathbb{R}}$ で表わす；また $b^{\pm}(p)$ で $p\in C$ から出る $H_g^{\mathbb{R}}$ の正(resp. 負)の積分曲線を表わす。ここで

$$C_k^{\pm}=\{p\in C\mid \pm\langle H_g^{\mathbb{R}}(p), da_k\rangle>0\} \quad (k=1,2)$$

とおく。$C_1^-\cup C_2^-$ (resp. $C_1^+\cup C_2^+$)の各点は角に入射する(resp. 角から放射される)特異性に対応している。§0で引用した論文では、次の結果を証明した：

[定理] u を§0の境界値問題の解とする。$p\in C_1^-\cup C_2^-$ であって、pは"一般の位置にある"(*)とする。このとき、

$b^-(p)\subset SS(u|\Omega)$ であって、$b^-(p')\not\subset SS(u|\Omega)$ $(\forall p'\in$

$C_1^- \cup C_2^-$ with $p' \neq p$) であるとすると、$\mathcal{C}^+(q) \subset SS(u|_\Omega)$ $(\forall q \in C_1^+ \cup C_2^+)$ である。□

ここに $SS(u|\Omega)$ は超函数 u の Ω 上の解析的波面集合を表わす。正の陪特性曲線 $\mathcal{C}^+(q)$ $(q \in C_1^+ \cup C_2^+)$ たちは、ただ一つの入射光線（入射する特異性）$\mathcal{C}^-(p)$ により生ずる回折光線（回折された特異性）と呼ばれる。(cf. Keller: A Geometrical Theory of Diffraction (J. Opt. Soc. Am. 52, 1962, pp.116–130) の Fig.5)

(*) この意味は正確に次のことをいっている。ρ_k で $T^*X \times_X Y_k \longrightarrow T^*Y_k$ への射影を表わす。但し Y_k は N_k の $\mathbb{C}^n$ に於る複素化 $(k=1,2)$。$(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ で $E(q_0)$ のアフィン座標で、その座標で $\rho_k | E(q_0)$ の各 fibre が $\eta_k = \text{const.}$ で表わされるようなものとする。p が"一般の位置にある"とは次の2つの特別な位置にないことをいう：

(III-1) $C = \{(\eta_1, \eta_2) \mid \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2 = r^2\}$,

$$p = (-r/\sqrt{3}, -r/\sqrt{3}) \quad (r \neq 0).$$

(III-2) $C = \{(\eta_1, \eta_2) \mid \eta_1^2 + \eta_2^2 = r^2\}$,

$$p = (-r, 0) \text{ or } (0, -r) \quad (r \neq 0).$$

§2. ここでは2つの特異性が同時に角に入射する場合を取扱う。この場合には§1の定理を導いたものと同様の議論によって次の結果を得る。

[定理] u は前と同様。$p, q \in C_1^- \cup C_2^-$ $(p \neq q)$ であって、$\{p, q\}$ は"一般の位置にある"(**) とする。このとき、$\mathcal{C}^-(p) \cup \mathcal{C}^-(q) \subset SS(u|\Omega)$ であって、$\mathcal{C}^-(p') \not\subset SS(u|\Omega)$ $(\forall p' \in C_1^- \cup C_2^- \setminus \{p, q\})$ であるとすると、

$\mathcal{C}^+(r) \subset SS(u|_\Omega)$ $(\forall r \in C_1^+ \cup C_2^+)$ である。□

(**) ここに $\{p,q\}$ が"一般の位置にある"とは、次の特別な位置にないことをいう；

(**-1) $C=\{\eta_1^2+2\eta_1\eta_2\cos\frac{\pi}{5}+\eta_2^2=r^2\}$ $(r\neq 0)$

$\{p,q\}=\{\hat{t}_{(1)},\ \hat{t}_{(2)}\}$,

但し、$\hat{t}_{(1)}$, $\hat{t}_{(2)}$ は $t=\left(r\dfrac{\cos\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}},\ r\dfrac{\cos\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)$ の N_1, N_2 に関する反射点；i.e.,

$\{t, \hat{t}_{(1)}\}=C\cap\rho_1^{-1}\rho_1(t)$, $\hat{t}_{(2)}$ も同様。

(**-2) $C=\{\eta_1^2+\sqrt{2}\,\eta_1\eta_2+\eta_2^2=r^2\}$,

$\{p,q\}=\{(0,-r),(-\sqrt{2}r,r)\}$

or $\{(-r,0),(r,-\sqrt{2}r)\}$.

(**-3) $C=\{\eta_1^2+\eta_1\eta_2+\eta_2^2=r^2\}$,

$\{p,q\}=\left\{\left(\frac{r}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}r\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}r,\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

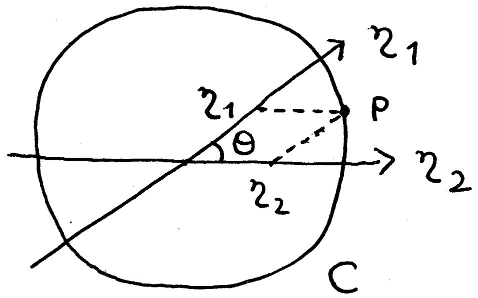
(**-4) $C=\{\eta_1^2-\eta_1\eta_2+\eta_2^2=r^2\}$,

$\{p,q\}=\left\{\left(-\frac{r}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}r\right),\left(-\frac{r}{\sqrt{3}},\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

or

$\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}r,-\frac{r}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{r}{\sqrt{3}},-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

ここに (η_1,η_2) は $(*)$ と同様な $E(q_0)$ のアフィン座標を表わす。



(**-1) $\theta=\frac{\pi}{5}$

(**-2) $\theta=\frac{\pi}{4}$

(**-3) $\theta=\frac{\pi}{3}$

(**-4) $\theta=\frac{2}{3}\pi$

(**-5) $C=\{\eta_1^2+\eta_2^2=r^2\}$,

$$\{p,q\}=\{(-r,0),(0,-r)\}.$$

証明は $\{p,q\}$ の位置で場合分けしてできるが、より一般に次の結果を示すことができる：

$p\in C$ に対して、

$$R_p=\{p,\ p_{\widehat{(1)}},\ p_{\widehat{(2)}},\ p_{\widehat{(1)}\widehat{(2)}},\ p_{\widehat{(2)}\widehat{(1)}},\ p_{\widehat{(1)}\widehat{(2)}\widehat{(1)}},\ \cdots\}$$

とおく。

[定理] u は前と同様。$Z\subset C_1^-\cup C_2^-$ を有限集合で、$\exists p\in Z$ が存在して $R_p\cap(C_1^-\cup C_2^-)\not\subset Z$ であると仮定する。(***) このとき、
$\sigma^-(p)\subset SS(u|\Omega)$ $(\forall p\in Z)$ であって、$\sigma^-(p')\not\subset SS(u|\Omega)$ $(\forall p'\in C_1^-\cup C_2^-\setminus Z)$ であるとすると、
$\sigma^+(q)\subset SS(u|\Omega)$ $(\forall q\in C_1^+\cup C_2^+)$ である。□

(***) この仮定は、

$$C=\{\eta_1^2+2\eta_1\eta_2\cos\theta+\eta_2^2=r^2\}\quad(r\neq0)$$

とかけて、ここで $\theta\notin\mathbb{Q}\pi$ であるならば、任意の有限集合 Z について満たされる。

但し、除外された場合に対して回折現象を起していない解が構成できるかどうかはよく分らない。(ある場合には確かに構成できる。)